

Keine Ahnung von ...

Differenzierbarkeit
zusammengesetzter Funktionen

Dater 41113

Stand: 30. Januar 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Zusammengesetzte Funktionen sind nicht selten ein Thema in der Analysis.

Ihr Schaubild (Graph) besteht dann aus den Graphen der Teilfunktionen.

Dabei kann es zu speziellen Situationen kommen:

Der Graph der zusammengesetzten Kurve kann einen Sprung machen (dann ist die Funktion nicht stetig). Das wird im Text 41011 untersucht.

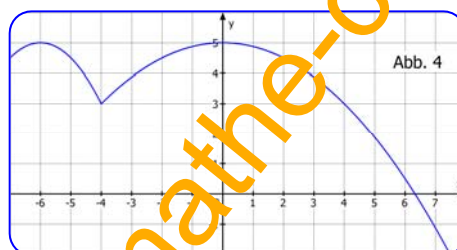
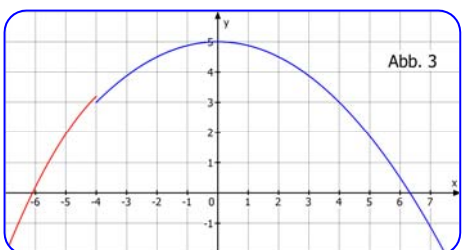
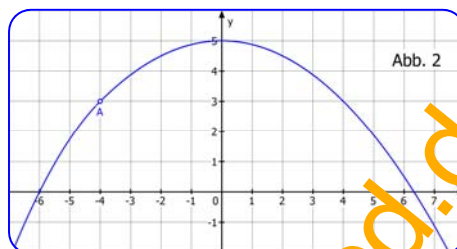
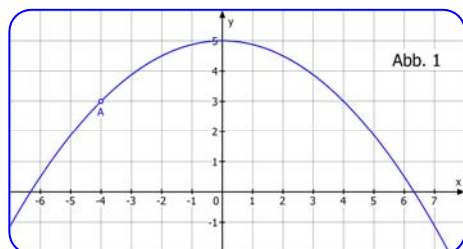
Sie kann einen Knick haben. Dann ist die Funktion nicht mehr differenzierbar, weil es an der Knickstelle zweierlei Tangentensteigungen gibt. Darum geht es in diesem Text.

Im Text 41114 gibt es dann ein paar Kurvendiskussionen von zusammengesetzten Funktionen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Einstieg

Der Begriff differenzierbar ist vielen Schülern zu abstrakt, weil man ihn meistens über einen Grenzwert definiert. Daher will ich mit einem sehr anschaulichen Einstieg beginnen. Ich zeige drei Grafiken.



Diese vier Schaubilder haben ganz unterschiedliche Eigenschaften.

Abbildung 1 und zwei gleichen sich, und doch vermutet man, dass Abb. 1. eine Parabel darstellt, Abb. 2 scheint dagegen etwas „verbogen“ zu sein. Die Kurve in Abb. 3 hat eine Lücke bzw. Sprung an der Stelle $x = -4$. In Abb. 4. gibt es an der Stelle $x = -4$ einen Knick.

Diese Stelle -4 ist auch in Abbildung 2 von Bedeutung, denn dort ist die Kurve aus zwei verschiedenen

Parabelbögen zusammengesetzt, aber ohne Knick (soweit man das erkennen kann) – im Gegensatz zu Abb. 4. Und das sind die Funktionen, deren Schaubilder wir sehen:

Abb. 1 $f_1(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5$

Abb. 2 $f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$

Abb. 3 $f_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - x + 3,2 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$

Abb. 4 $f_4(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 13 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$

Ich zeige nun, was an der Stelle $x = -4$ passiert. Dabei geht es vor allem um Tangenten.

Ich beginne mit der Parabelfunktion aus Abbildung 1.

Diese Parabel geht durch den Punkt $A(-4 | 3)$, denn es ist $f_1(-4) = -\frac{1}{8} \cdot 16 + 5 = 3$.

Die Steigung von Tangenten berechnet man mit der ersten Ableitungsfunktion: $f_1'(x) = -\frac{1}{4}x$

Also folgt $m_{T,A} = f_1'(-4) = -\frac{1}{4} \cdot (-4) = 1$. Die Tangentengleichung erstellt man mit der

Punkt-Steigungsform: $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A) \Leftrightarrow y - 3 = 1 \cdot (x + 4) \Leftrightarrow \boxed{y = x + 7}$.

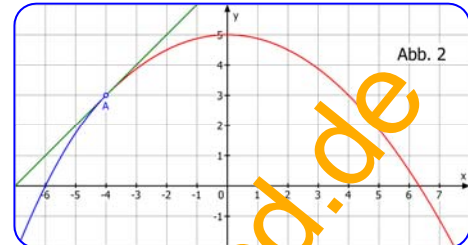
Man sollte wissen: Bei ganzrationalen Funktionen kann man an jeder Stelle x eine Tangente aufstellen, weil die Ableitungsfunktion überall einen eindeutigen Steigungswert liefert.

Das ist die anschauliche Bedeutung der Aussage: **f ist differenzierbar**

Nun zu Abbildung 2.

f_2 ist eine zusammengesetzte Funktion

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$$



Die Kurve besteht also aus zwei Parabelbögen, die an der Stelle -4 , also bei A lückenlos zusammengesetzt sind. Dies kann man überprüfen:

Die linke Funktion liefert: $f_{2,l}(-4) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 4 + 3 = -4 + 4 + 3 = 3$

Die rechte Funktion liefert: $f_{2,r}(-4) = -\frac{1}{8} \cdot 16 + 5 = -2 + 5 = 3$

Das heißt, dass die Kurvenbögen im Punkt A zusammenstoßen.

Man sagt: **f ist stetig bei $x = -4$.**

Wie sieht es bei A mit einer Tangente aus? Gibt es überhaupt eine eindeutige Tangente in A?

Dazu bewegen wir uns auf dem **linken** Parabelbogen auf A zu und schauen, wie sich die Tangente dabei verhält. $f_{2,l}'(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ liefert für A: $f_{2,l}'(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) - 1 = 1$

Nähert man sich auf dem **rechten** Parabelbogen dem Punkt A, dann bekommt man diese

Tangentensteigung: $f_{2,r}'(x) = -\frac{1}{4}x$ und das führt zu $f_{2,r}'(-4) = -\frac{1}{4} \cdot (-4) = 1$

Wir erhalten also bei Annäherung von links und von rechts dieselbe Tangentensteigung, also dieselbe Tangente im Punkt A.

Wenn es an einer Stelle (wie hier) eine eindeutige Tangentensteigung gibt, dann sagt man:

f ist bei $x = -4$ differenzierbar

Zusammenfassend kann man folgendes sagen: **f_2 ist (überall) differenzierbar**, denn

1. wie gesehen ist f_2 bei $x = -4$ differenzierbar,
2. sie ist für $x < -4$ als ganzrationale Funktion überall differenzierbar (dies muss man einfach an dieser Stelle wissen), und
3. dasselbe gilt für $x > -4$.

In **Abbildung 3** erkennt man an der Stelle $x = -4$ einen Sprung. Dies zeigt schon ein Vergleich der beiden Funktionen.

$$\text{Abb. 2} \quad f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - x + 3 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$$

$$\text{Abb. 3} \quad f_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - x + 3,2 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$$

Für $x < -4$ ist der Funktionswert von f_3 stets um 0,2 größer als der von f_2 .

Das heißt anschaulich, dass der linke Parabelbogen um 0,2 in y-Richtung verschoben ist.

Damit entsteht bei -4 eine Lücke: f_3 ist an der Stelle -4 nicht stetig.

Zudem habe ich absichtlich einen Fehler eingebaut, den der Leser erkennen sollte:

Für die Berechnung von $f_3(-4)$ gibt es zwei Vorschriften:

Der linke Funktionsteil ist für $x \leq -4$ zuständig, und somit kann man daraus berechnen:

$$f_{3,l}(-4) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 4 + 3,2 = 3,2$$

Der rechte Funktionsteil ist für $x \geq -4$ zuständig, also kann man auch daraus berechnen:

$$f_{3,r}(-4) = -\frac{1}{8} \cdot 16 + 5 = 3$$

Dadurch ist nun ein Widerspruch entstanden: Bei einer Funktion müssen alle Zuordnungen eindeutig sein.

Also kann es zu $x = -4$ nicht zwei verschiedene Funktionswerte geben.

Der Fehler liegt in der Aufgabenstellung. Man sollte bei zusammengesetzten Funktionen darauf achten, dass der Funktionswert der Nahtstelle nicht aus beiden Teilfunktionen berechnet werden kann.

(Dies ist kein Problem, wenn die Funktion dort stetig ist, aber in Fällen wie hier entsteht Unsinn.)

Besser ist also diese Funktionsdefinition $f_4(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - x + 3,2 & \text{für } x < -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$

Jetzt wird $f_4(-4)$ nur aus der rechten Funktion berechnet.

Es geht bei uns um die Differenzierbarkeit. Ich stelle daher die Frage:

Gibt es an das Schaubild von f_3 an der Stelle -4 eine eindeutige Tangente?

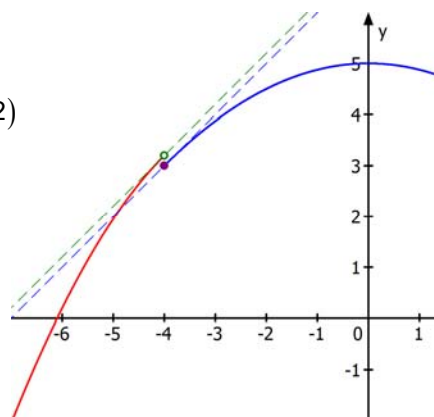
Die Antwort heißt „nein“.

Die Zeichnung zeigt die Tangente (rot), die entsteht, wenn man sich von links zur Stelle -4 bewegt. Sie berührt in $B(-4 | 3,2)$

und die unterhalb davon liegende Tangente (blau), die entsteht, wenn man sich von rechts her nach -4 bewegt.

Ihr Berührungspunkt ist $A(-4 | 3)$.

Beide Tangenten sind parallel, weil die rechte und die linke Ableitungsfunktion für $x = -4$ den Steigungswert 1 liefern.



Man erkennt hier, dass die Differenzierbarkeit dann scheitert, wenn die Funktion an der betreffenden Stelle nicht stetig ist.

(Umgekehrt kann man aber folgern, dass aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt.)

Nun bleibt noch **Abbildung 4**.

Die Funktion $f_4(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 13 & \text{für } x \leq -4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{für } x \geq -4 \end{cases}$ ist an der Stelle -4 stetig aber nicht differenzierbar.

Die Stetigkeit rechnet man schnell nach:

$$f_{4,l}(-4) = -\frac{1}{2} \cdot 16 + 24 - 13 = 3 \quad \text{und} \quad f_{4,r}(-4) = -\frac{1}{8} \cdot 16 + 5 = 3$$

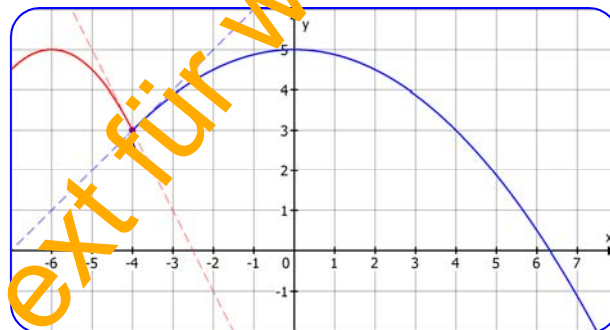
Beide Parabelbögen treffen sich also in $A(-4 | 3)$.

Nun geht es um die Differenzierbarkeit. Hier erkennt man schon in der Abbildung, dass das Schaubild von f_3 in A einen **Knick** aufweist. Von links kommend fällt die Kurve (negative Steigung bei Erreichen von A), geht man aber von A weiter nach rechts, dann steigt die Kurve an.

Mathematisch verwendet man dazu die Ableitungsfunktion:

$$f_4'(x) = \begin{cases} -x - 6 & \text{für } x < -4 \\ -\frac{1}{4}x & \text{für } x > -4 \end{cases}$$

Es ist üblich, bei der Ableitungsfunktion der Knickstelle keinen Steigungswert zuzuordnen, wenn man feststellt, dass sie dort **nicht differenzierbar** ist. Damit vermeidet man Missverständnisse. Hier erkennt man also: $f_4'(-4)$ existiert nicht. Anschaulicher Hintergrund: Von A gehen zwei Tangenten aus. Und da man keine zwei Werte für $f_4'(-4)$ akzeptieren kann (Eindeutigkeit des Funktionswertes) ordnet man lieber gar keinen Wert zu.



Man kann also die Frage nach der Differenzierbarkeit rein anschaulich so beantworten:

Ist f an einer Stelle $x = a$ nicht stetig oder ihr Graph hat einen Knick, dann gibt es dort keine bzw. keine eindeutige Tangente; f ist dort nicht differenzierbar.

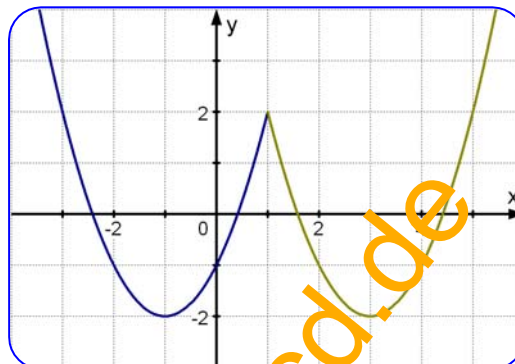
Differenzierbarkeit bei $x = a$ besagt nämlich, dass es dort eine eindeutige Tangente gibt, bzw. dass für diese Stelle ein eindeutiger Steigungswert existiert und f stetig ist.

2 Untersuchungsmethode für zusammengesetzte Funktionen

BEISPIEL 1

Gegeben ist f durch
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{für } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Untersuche, ob f differenzierbar ist.



Ich zweige eine **Drei-Schritt-Methode**:

Man spricht über die Differenzierbarkeit des linken Funktionsteils, dann des rechten Funktionsteils und drittens untersucht man die Nahtstelle.

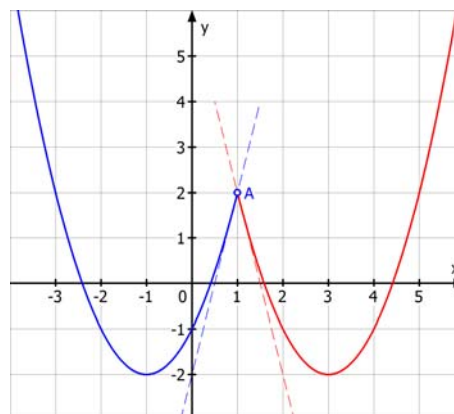
- (1) Die Funktion $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$ ist eine ganzrationale Funktion.
Dazu sollte man gelernt haben, dass diese Funktionen überall differenzierbar sind.
Das heißt, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ einen eindeutigen Ableitungswert $f'(x)$ gibt, (der ja bekanntlich die Tangentensteigung angibt. Das gilt natürlich auch für die erste Teilfunktion, die einen eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbb{D}_1 =]-\infty; 1[$ hat.
- (2) Die Funktion $f_2(x) = x^2 - 6x + 7$ ist eine ganzrationale Funktion.
Auch sie ist überall differenzierbar, also auch auf $]1; \infty[$.
- (3) Untersuchung der Nahtstelle $x = 1$.
Betrachtet man die linke Teilfunktion ohne Einschränkung, dann erhält man $f_1'(x) = 2x + 2$ und daraus $f_1'(1) = 4$. Das bedeutet, dass die von links auf den Knickpunkt A zulaufende Tangente in A die Steigung 4 hat.
Betrachtet man die rechte Teilfunktion ohne Einschränkung, dann erhält man $f_2'(x) = 2x - 6$ und daraus $f_2'(1) = -4$. Das bedeutet, dass die von rechts auf den Knickpunkt A zulaufende Tangente in A die Steigung -4 hat.

Von A aus gibt es also zwei „Halbtangenten“ mit den Steigungen 4 und -4.

Also hat f in A keine eindeutige Tangente.

Mit anderen Worten:

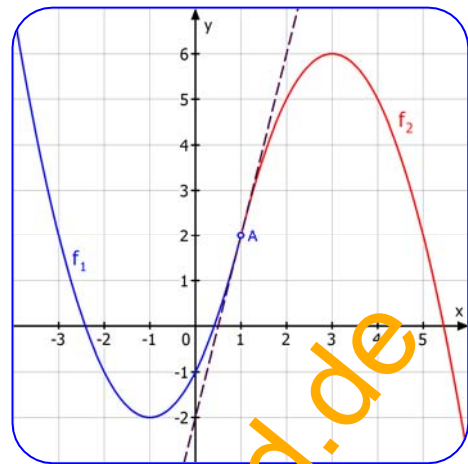
f ist bei $x = 1$ nicht differenzierbar, sonst überall.



BEISPIEL 2

Gegeben ist f durch $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{für } x < 1 \\ -x^2 + 6x - 3 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Untersuche, ob f differenzierbar ist.



Lösung

(1) $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$ ist als ganzrationale Funktion in $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ differenzierbar.

(2) $f_2(x) = -x^2 - 6x - 3$ ist als ganzrationale Funktion in $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ differenzierbar.

(3) An der Nahtstelle $x=1$ ist f stetig mit $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 2 - 1 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 6 - 3 = 2 = f(1)$.

Für die Ableitungsfunktion gilt: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{für } x < 1 \\ -2x + 6 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

Für die linke Teilfunktion gilt nach (1): $f_1'(1) = 2 + 2 = 4$

Für die rechte Teilfunktion gilt nach (2): $f_2'(1) = -2 + 6 = 4$

Da die Tangentensteigungen von links und von rechts gleich groß sind, kann man ergänzen:

$$f'(1) = 4$$

Also ist f auch bei $x = 1$ differenzierbar.

BEISPIEL 3

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 & \text{für } x < -2 \\ x^3 - 4x & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$

Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:**a) Untersuchung auf Stetigkeit:**

Die beiden Teilfunktionen $f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$ und $f_2(x) = x^3 - 4x$ sind als ganzrationale Funktionen stetig, also auch in ihren Definitionsintervallen.

Untersuchung der Nahtstelle $x = -2$:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Grenzwert von links:} & \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = f_1(-2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 8 - 6 = 0 \\ \text{Grenzwert von rechts:} & \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = f_2(-2) = -8 + 8 = 0 \\ \text{Funktionswert:} & f(-2) = f_2(-2) = 0 \end{array} \right\}$$

Da beide Grenzwerte und der Funktionswert übereinstimmen, ist f auch bei $x = -2$ stetig.

Ergebnis: f ist eine stetige Funktion.

b) Untersuchung der Differenzierbarkeit:

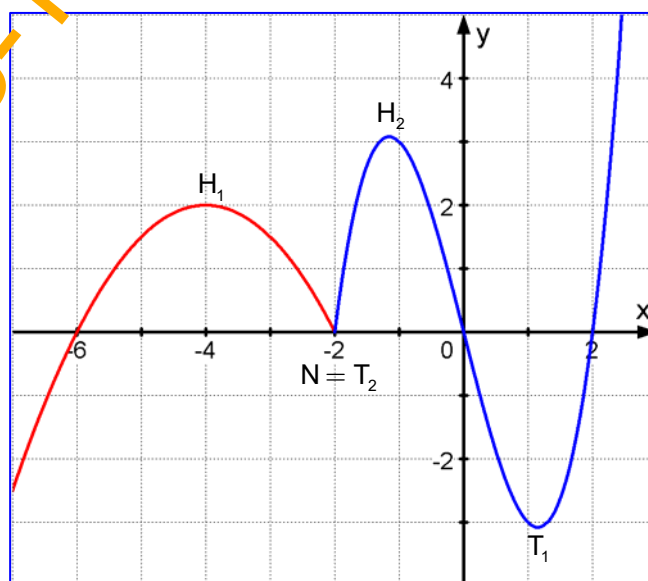
$$f'(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{für } x < -2 \\ 3x^2 - 4 & \text{für } x > -2 \end{cases}$$

Achtung: Die Stelle $x = -2$ bleibt vorerst unberücksichtigt, bis geklärt ist, ob es dort einen eindeutigen Ableitungswert gibt!

Da f_1 sogar in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, gilt auch $f_1'(-2) = 2 - 4 = -2$

analog folgt für f_2 : $f_2'(-2) = 12 - 4 = 8$

Da es im Kurvenpunkt $N(-2|0)$ von links und rechts unterschiedliche Tangentensteigungen gibt, ist f bei -2 nicht differenzierbar.



BEISPIEL 4

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:**a) Untersuchung der Stetigkeit.**

Die 1. Teilfunktion $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ist als gebrochen rationale Funktion

nur dort nicht stetig, wo der Nenner Null wird, also bei $x=0$.

Im angegebenen Teildefinitionsbereich $0 < x < 1$ ist also f_1 stetig.

Die 2. Teilfunktion $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ ist als ganzrationale Funktion

überall stetig, also auch in ihrem Teildefinitionsbereich $1 \leq x \leq 3$.

Untersuchung der Nahtstelle $x = 1$.

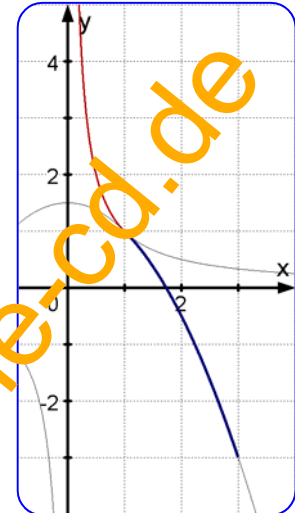
Grenzwert von links: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = f_1(1) = 1$

Grenzwert von rechts: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = f_2(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} = 1$

Funktionswert: $f(1) = f_2(1) = 1$

Da beide Grenzwerte und der Funktionswert übereinstimmen, ist f auch bei $x = 1$ stetig.

Ergebnis: f ist eine stetige Funktion.

**b) Untersuchung der Differenzierbarkeit:** $f'(x) = \begin{cases} -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ -x & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Die beiden Teilfunktionen sind in ihren Teilbereichen differenzierbar und sogar an der Stelle 1.

Also kann man berechnen: $f_1'(1) = -1$ und $f_2'(1) = -1$

Da beide übereinstimmen, kann man der Stelle 1 eindeutig einen Ableitungswert zuweisen:

$f'(1) := -1$. Damit ist f in $]0; 3[$ differenzierbar und man kann schreiben:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ -x & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

c) Ist f bei $x = 1$ auch zweimal differenzierbar?

Dazu: $f''(x) = \begin{cases} 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} & \text{für } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{für } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Beide Teilfunktionen sind in ihrem Definitionsbereich zweimal

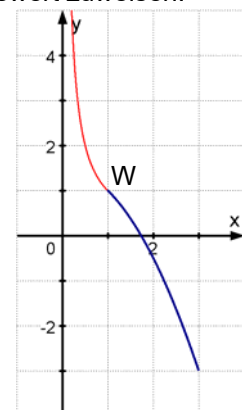
differenzierbar, daher gilt $f_1''(1) = 2$ und $f_2''(1) = -1$.

f ist also bei 1 nicht zweimal differenzierbar.

An der Stelle 1 findet ein Vorzeichenwechsel von f'' statt. Der Nahtpunkt W ist somit

ein Wendepunkt. ABER die Kurve macht an dieser Stelle einen **Ruck**, weil sich dort schlagartig die Krümmung ändert.

Wäre f dort zweimal differenzierbar, wäre der Übergang **ruckfrei**.



BEISPIEL 5

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^2} & \text{für } |x| \geq 2 \quad \text{d.h. } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ ax^2 + b & \text{für } |x| < 2 \quad \text{d.h. } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Bestimme a und b so, dass f stetig und differenzierbar ist.

Lösung:

Es geht im Grunde nur um die Nahtstelle $x = 2$. Denn die Situation ist wegen der Symmetrie (gerade Exponenten) ist dann auch bei $x = -2$ klar. Und außerdem sind $f_1(x) = \frac{8}{x^2}$ für $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_2(x) = ax^2 + b$ in $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar.

Damit f also bei 2 stetig ist muss gelten: $f_1(2) = f_2(2)$ d. h. $2 = 4a + b$ (1)

Für die Differenzierbarkeit brauchen wir $f'(x) = \begin{cases} -\frac{16}{x^3} & \text{für } |x| \geq 2 \\ 2ax & \text{für } |x| < 2 \end{cases}$

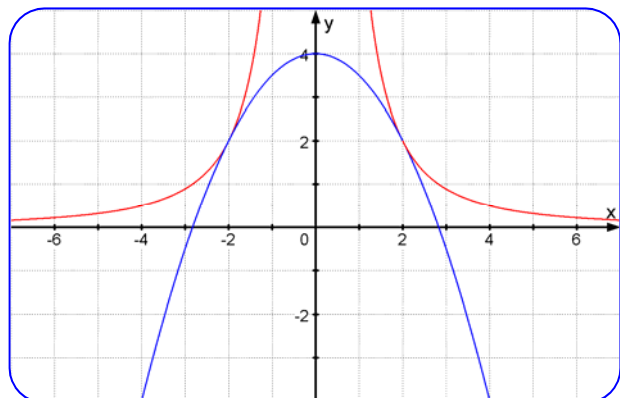
Damit f bei 2 differenzierbar ist muss gelten: $f_1'(2) = f_2'(2)$ d. h. $-2 = 4a$ (2)

Aus (2) folgt: $a = -\frac{1}{2}$

Und aus (1): $b = 2 - 4a = 2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 4$

Ergebnis: $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^2} & \text{für } |x| \geq 2 \quad \text{d.h. } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4 & \text{für } |x| < 2 \quad \text{d.h. } -2 < x < 2 \end{cases}$

Diese Abbildung zeigt die Schaubilder beider Funktionen.



Das nächste Schaubild zeigt den Graphen der zusammengesetzten Funktion:

